Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο Μάθημα: **Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης** ,

Ημ/νία: 27 Μαΐου 2013

Απαντήσεις Θεμάτων

Θεμα Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 334-335

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 246-247

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 222

Α4. α. **Λάθος** **β.** **Σωστό** **γ.** **Σωστό** **δ.** **Λάθος** **ε.** **Σωστό**

Θεμα Β

Β1. Είναι: $(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2$

$\Leftrightarrow (z-2)(\overline{z-2})+|z-2|=2$

$\Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0 \quad (1)$

Θέτουμε $|z-2|=\rho>0$, οπότε η (1) γράφεται:

$\rho^2+\rho-2=0 \Leftrightarrow \rho=-2$ απορρίπτεται ή $\rho=1$

Άρα $|z-2|=1$ και ο γεωμετρικός τόπος των z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Ισχύει: $|z|=|z-2+2|\leq|z-2|+2=3$

Εναλλακτικά, ο μιγαδικός με το μέγιστο μέτρο είναι ο $z=3$ με $|z|=3$.

Οπότε ισχύει: $|z|\leq 3$.

Β2. Για τους z_1, z_2 που ανήκουν στον κύκλο και είναι συζυγείς ως ρίζες της εξίσωσης:

$w^2+\beta w+\gamma=0$ ισχύει:

$|Im(z_1)-Im(z_2)|=2 \Leftrightarrow |Im(z_1)-Im(\overline{z_1})|=2 \Leftrightarrow 2|Im(z_1)|=2$

$\Leftrightarrow Im(z_1)=1$ ή $Im(z_1)=-1$

Οπότε θεωρούμε: $z_1=2+i$ και $z_2=\overline{z_1}=2-i$

Για την εξίσωση ισχύει: $\begin{cases} z_1+z_2=-\beta \\ z_1\cdot z_2=\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-4 \\ \gamma=5 \end{cases}$

Β3. Ισχύει:

$$\nu^3 + \alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0 = 0$$
$$-\nu^3 = \alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0$$

Οπότε:

$|-\nu^3| = |\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0|$

$|\nu|^3 \leq |\alpha_2| \cdot |\nu|^2 + |\alpha_1| \cdot |\nu| + |\alpha_0|, \quad (1)$

Θέτω: $|\nu| = \rho > 0$ οπότε η σχέση (1) γίνεται:

$\rho^3 \leq |\alpha_2|\rho^2 + |\alpha_1| \cdot \rho + |\alpha_0|$

Χρησιμοποιώντας ότι: $|\alpha_0| \leq 3,\ |\alpha_1| \leq 3,\ |\alpha_2| \leq 3$ παίρνουμε:

$\rho^3 \leq 3\rho^2 + 3\rho + 3$

$\rho^3 - 3\rho^2 - 3\rho - 3 \leq 0 < 1$

$\rho^3 - 3\rho^2 - 3\rho - 4 < 0$

$(\rho - 4)(\rho^2 + \rho + 1) < 0,$ (με σχήμα Horner)

$\rho - 4 < 0,$ αφού $\rho^2 + \rho + 1 > 0$ για κάθε $\rho > 0$

$\rho < 4$ ή $|\nu| < 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$(f(x) + x) \cdot (f'(x) + 1) = x$

$2(f(x) + x) \cdot (f'(x) + 1) = 2x$

$[(f(x) + x)^2]' = (x^2)'$

Άρα υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{R}$ ώστε: $[f(x) + x]^2 = x^2 + c,$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ προκύπτει $c = 1$.

Άρα ισχύει: $(f(x) + x)^2 = x^2 + 1,$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)

Για τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x$ με $x \in \mathbb{R}$ και επειδή: $x^2 + 1 > 0,$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ισχύει: $h(x) \neq 0,$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Επειδή: $h(0) = f(0) = 1 > 0$ ισχύει: $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (2)

Η (1) γράφεται: $(h(x))^2 = x^2 + 1,$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και λόγω της σχέσης (2) παίρνουμε: $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$f(x) + x = \sqrt{x^2+1}$

$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x,\;$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0,$$

γιατί: $\sqrt{x^2+1} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Διαφορετικά, λύνουμε την ανίσωση: $f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x - \sqrt{x^2+1} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > x$

αν $x \geq 0$ τότε: $x^2 + 1 > x^2$ που ισχύει

αν $x < 0$ προφανώς ισχύει.

Άρα: $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης προκύπτει: $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για την εξίσωση έχουμε: $f\big(g(x)\big) = 1 \Leftrightarrow f\big(g(x)\big) = f(0) \Leftrightarrow g(x) = 0 \quad (3)$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεπώς «1-1».

Οπότε η (3) γράφεται:

$$x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow\; 2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2\;$ με $x \in \mathbb{R}$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $\varphi'(x) = 6x^2 + 6x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύνουμε την εξίσωση: $\varphi'(x) = 0 \;\Leftrightarrow 6x(x+1) = 0 \Leftrightarrow\; x = 0\;$ ή $\;x = -1$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		↗		↘		↗	

- Η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -1]$
  Άρα:
  $\varphi(\Delta_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x),\;\; \varphi(-1)\right] = (-\infty, -1]$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$
  Επειδή $0 \notin \varphi(\Delta_1)$ η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ είναι αδύνατη

- Η φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [-1\,,0]$
  Άρα $\varphi(\Delta_2) = [\varphi(0)\,,\ \varphi(-1)] = [-2\,,-1]$
  Επειδή $0 \notin \varphi(\Delta_2)$ η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ είναι αδύνατη

- Η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_3 = [0,+\infty)$
  Άρα:
  $\varphi(\Delta_3) = \left[\varphi(0), \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\right) = [-2,+\infty)$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$
  Επειδή το $0 \in \varphi(\Delta_3)$, (αφού η $\varphi \uparrow$ στο Δ_3) η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $\rho \in (0+\infty)$

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt + f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \varepsilon\varphi x \ \text{ με } \ x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Οπότε είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ ως σύνθεση συνεχών.

- Η Φ είναι συνεχής στο $[0,\pi/4]$ ως άθροισμα γινόμενο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων,
- $\Phi(0) = \int_0^{-\frac{\pi}{4}} f(t)\cdot dt = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t)\cdot dt < 0$ αφού ισχύει $f(t) > 0$ για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{4},0\right]$

Οπότε: $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\cdot dt > 0 \Leftrightarrow -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\cdot dt$

- $\Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = f(0)\cdot \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1 > 0$
  Άρα ισχύει $\Phi(0)\,\Phi\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$

Από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in \left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ για τον οποίο ισχύει:

$$\Phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)\cdot dt + f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\varepsilon\varphi x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\cdot dt = f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\varepsilon\varphi x_0$$

β' τρόπος: Οι μαθητές θα μπορούσαν να λύσουν το θέμα και ως εξής:

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(x)\cdot dt + f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\cdot dt + \eta\mu x\cdot f\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\left[\eta\mu x\cdot\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\cdot dt\right]' = 0 \quad (4)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = \eta\mu x\cdot\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt\,,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$$

Η h είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ και η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Είναι: $h(0)=0$ και $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, δηλαδή $h(0)=h\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ για τον οποίο ισχύει:

$h'(x)=0$, άρα ισχύει η σχέση (4).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h}+\dfrac{f(1)-f(1-h)}{h}\right]$

Ισχύει: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{f(x)-f(1)}{\frac{x-1}{5}}\right] = 5\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 5\cdot f'(1)$

Με αντικατάσταση $x=1+5h \Leftrightarrow h=\frac{x-1}{5}$ και $x\to 1$ όταν $h\to 0$ παίρνουμε:

Αντίστοιχα, για το όριο: $\lim_{h\to 0}\frac{f(1)-f(1-h)}{h}$ με αντικατάσταση $t=1-h \Leftrightarrow h=1-t$ και $t\to 1$ όταν $h\to 0$ παίρνουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1)-f(1-h)}{h} = +\lim_{t\to 1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1} = f'(1)$$

Οπότε από την (1) προκύπτει:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=6f'(1)\Leftrightarrow 6f'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=0 \quad (2)$$

Για $0<x<1$ είναι: $f'(x)<f'(1)\Leftrightarrow f'(x)<0$

και για $x>1$ είναι: $f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0$, εφόσον η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Έτσι προκύπτει ο πίνακας:

	0				$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Ολικό Ελάχιστο	$\nearrow$	

Οπότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=1$.

Δ2. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως αρχική της συνεχούς συνάρτησης $\frac{f(t)-1}{t-1}$ με $g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}$

Ισχύει: $x>1\Leftrightarrow f(x)>f(1)=1\Leftrightarrow f(x)-1>0\Leftrightarrow g'(x)>0$

Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x)=\int_{x}^{x+1} g(t)dt,\ \ x\in(1,+\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=g(x+1)-g(x)>0$, αφού η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$. Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Η ανίσωση γράφεται:

$h(8x^2+5)>h(2x^4+5)\Leftrightarrow 8x^2+5>2x^4+5\Leftrightarrow 2x^2(4-x^2)>0\Leftrightarrow x\in(-2,0)\cup(0,2)$

Δ3. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$$g''=\left(\frac{f(x)-1}{x-1}\right)'=\frac{f'(x)\cdot(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$$

$$g''(x)=\frac{1}{(x-1)}\left[f'(x)-\left(\frac{f(x)-1}{x-1}\right)\right] \quad (3)$$

Η f είναι συνεχής στο $[1,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,x)$ ενώ η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(x) - 1}{x - 1}$$

Επειδή $1 < \xi < x$ είναι: $f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) - f'(\xi) > 0$.

Οπότε από τη σχέση (3) προκύπτει ότι:

$$g''(x) = \frac{1}{x - 1} \cdot [f'(x) - f'(\xi)] > 0$$

Άρα η g είναι κυρτή στο $(1\,, +\infty)$.

Η εξίσωση γράφεται:

$(\alpha - 1) \cdot g(x) - (f(a) - 1)(x - a) = 0$

$\Leftrightarrow \varphi(x) = 0$, όπου $\varphi(x) = (\alpha - 1) \cdot g(x) - (f(a) - 1)(x - a)$ με $x \in (1, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι: $\varphi(\alpha) = 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι μοναδική λύση.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με:

$\varphi'(x) = (\alpha - 1) \cdot g'(x) - (f(a) - 1)$

$\varphi'(x) = (\alpha - 1)\left[g'(x) - \left(\frac{f(a) - 1}{\alpha - 1}\right)\right]$, αφού $f(1) = 1$

$\varphi'(x) = (\alpha - 1)\big(g'(x) - g'(\alpha)\big)$

Θέτουμε $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = g'(a) \Leftrightarrow x = a$ γιατί g' γνησίως αύξουσα.

Επίσης: $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > g'(a) \Leftrightarrow x > a$

$\varphi'(x)$	1	a	
$\varphi(x)$	+ ↘	0	− ↗
		Ο.Ε	

Άρα για κάθε $x > 1$ είναι: $\varphi(x) \geq \varphi(\alpha)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = a$

Άρα: $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x > 1$ με $x \neq \alpha$ και συνεπώς η λύση $x = a$ είναι μοναδική.

Επιμέλεια: Γιάννης Μερτίκας, Δημήτρης Βλάχος, Χρήστος Αναστασίου, Αλέξανδρος Φιτσόπουλος, Αποστόλης Κωτσιαρίνης, Ηρώ Μαρκάκη